XVII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións
Ourense, 23 - 25 de outubro de 2025

Un nuevo índice de poder para escenarios de votación

A. Mascareñas-Pazos [1], S. Lorenzo-Freire[1] y J. M. Alonso-Meijide[2]

[1] *Grupo de Investigación MODES, Departamento de Matemáticas, Facultad de Informática y CITIC, Universidad de A Coruña, Campus de Elviña, 15071 A Coruña y CITIC, 15008 A Coruña, España.*
[2] *Grupo de Investigación MODESTYA, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Compostela, Campus de Lugo, 27002 Lugo y CITMAga, 15782 Santiago de Compostela, España.*

RESUMEN

En los procesos de toma de decisiones colectivas, la influencia de cada participante a menudo se asocia con el peso de su voto individual. Sin embargo, esto puede llevar a conclusiones erróneas puesto que dicho peso no siempre representa la influencia real de cada votante. La teoría de juegos permite abordar este problema mediante el desarrollo de índices de poder, que son medidas mucho más rigurosas de dicha influencia. Felsenthal introdujo un índice que atribuye poder únicamente a las coaliciones de jugadores ganadoras de menor tamaño, es decir, aquellas capaces de determinar el resultado final y que incluyen el menor número de jugadores posible. No obstante, en su índice, no tuvo en cuenta las afinidades (ideológicas, personales...) que pueden existir entre los jugadores y que afectan significativamente a las dinámicas de poder. En este trabajo hemos diseñado un nuevo índice de poder, al que denominamos *Índice de poder de Felsenthal con uniones*, que tiene en cuenta dichas afinidades y proporciona, por tanto, una medida más fiable de la influencia real de cada jugador. Además, hemos identificado dos conjuntos distintos de propiedades que caracterizan al nuevo índice, lo que permite una compresión más detallada del mismo. Finalmente, hemos aplicado el índice al estudio de la distribución de poder entre los países miembros del Fondo Monetario Internacional, revelando cómo las alianzas estratégicas pueden modificar de manera significativa dicha distribución.

Palabras y frases clave: Juegos simples; Poder; Índice de Felsenthal; Uniones a priori; Fondo Monetario Internacional.

1. INTRODUCCIÓN

En la sociedad se presentan innumerables situaciones en las que un grupo de individuos, con distintas opiniones y preferencias, debe tomar una decisión en conjunto: desde los debates parlamentarios en torno a la aprobación de una ley, hasta las deliberaciones de los accionistas de una empresa acerca de su plan estratégico. El procedimiento más habitual para resolver este tipo de situaciones es la votación. Además, es frecuente que en dicha votación se asignen distintos pesos para reflejar la importancia particular de cada participante. Así, por ejemplo, los accionistas mayoritarios de una empresa suelen recibir una mayor ponderación en las votaciones con el objetivo de garantizarles mayor influencia sobre las decisiones (Figura 1).

Sin embargo, esta práctica puede resultar engañosa, puesto que el peso asignado no siempre representa con exactitud la influencia real de los votantes sobre el resultado final. Considérese una votación de mayoría ponderada de tres miembros con pesos 4, 2 y 1, de tal manera que una coalición se considera ganadora si suma al menos 4 (4 de 7). En este escenario, el primer miembro, con peso 4, puede imponer su decisión de manera unilateral, mientras que los otros dos, aún sumando 3 votos en conjunto, carecen de ningún poder. Es evidente, por tanto, que el peso de cada miembro no es proporcional a su poder. Esta discrepancia es peligrosa ya que puede derivar en el diseño de sistemas de votación injustos donde los miembros no estén representados adecuadamente, y evidencia la necesidad de desarrollar medidas de poder correctas alternativas al peso.

Este problema puede abordarse desde la teoría de juegos, donde las votaciones se modelan como *juegos simples* y la influencia de cada jugador se mide usando los llamados *índices de poder*.

Figura 1. A la izquierda, votación en sesión plenaria del Parlamento Europeo (Pietro Naj-Oleari, 2010); a la derecha, accionistas deliberando en una reunión de trabajo (Freepik, s.f.).

Dos de los primeros índices de poder propuestos fueron el índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954) y el índice de Banzhaf (Banzhaf, 1965). Ambos basan el poder de un jugador en la frecuencia con la que este es *pivotal* para una coalición, es decir, que la coalición se convierte en ganadora cuando se une el jugador. En 1978, Deegan y Packel introdujeron un nuevo índice que se limitaba a considerar el conjunto de *coaliciones ganadoras minimales*, aquellas en las que todos sus jugadores son necesarios para asegurar la victoria. Más recientemente, en 2016, Felsenthal desarrolló un nuevo índice centrado exclusivamente en las *coaliciones ganadoras minimales de menor tamaño*, en lugar de en todo el conjunto. Su enfoque se basa en la idea de que, en contextos como la formación de gobierno, los participantes buscan, no solo ser parte de una coalición ganadora, sino también maximizar su poder individual dentro de ellas.

Una limitación importante de los índices clásicos mencionados anteriormente es que ignoran las afinidades personales, políticas o ideológicas que pueden existir entre los jugadores. Estas afinidades provocan que ciertas coaliciones, como las formadas por partidos de la misma ideología política, sean más probables que otras, lo cual repercute directamente en la distribución del poder. Con el objetivo de representar esas estructuras preexistentes, Owen propuso en 1977 una extensión del índice de Shapley-Shubik, conocida como el *índice de Owen*, que incorporaba una partición del conjunto de jugadores en subconjuntos denominados *uniones a priori*. A partir de esta idea, se han desarrollado generalizaciones de otros índices clásicos, como el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1982) o el índice de Deegan–Packel con uniones a priori (Alonso-Meijide et al., 2011), dando lugar a la familia de los llamados *índices de poder coalicionales*.

Ante la pluralidad de índices desarrollados, surge de manera natural la pregunta: ¿Qué índice es mejor? Es decir, ¿cuál refleja con más precisión el poder que posee cada jugador en una votación? Son muchos los autores como Aumann (2017), que sostienen que no existe un índice óptimo universal, y que distintos contextos pueden requerir distintos índices. Para poder identificar el más apropiado para un contexto específico, resulta fundamental estudiar las propiedades de cada índice. De hecho, identificar un conjunto mínimo de propiedades que determine de forma única un índice (una caracterización axiomática) permite no solo orientar la elección del índice, sino comprender con mayor claridad los aspectos del poder que captura y facilitar su comparación con otros índices, subrayando similitudes y diferencias.

En este trabajo introducimos una modificación del índice de Felsenthal, enriquecida con el concepto de uniones a priori, que denominamos *Índice de Poder de Felsenthal con uniones*. Además, presentamos dos caracterizaciones axiomáticas de este nuevo índice, combinando propiedades ya conocidas con otras novedosas para índices de poder coalicionales. Finalmente, empleamos el *Índice de Poder de Felsenthal con uniones* para realizar un análisis detallado de la distribución del poder dentro del Fondo Monetario Internacional (FMI), basándonos en su estructura organizativa de marzo de 2025.

El artículo está estructurado por secciones. En la Sección 2 se presentan conceptos básicos de teoría de juegos necesarios para nuestro desarrollo. En la Sección 3 se introduce formalmente el nuevo índice y se exponen sus propiedades; en la Sección 4 se ofrece un ejemplo aplicado al FMI; y en la Sección 5 se recogen las principales conclusiones.

2. CONCEPTOS BÁSICOS EN TEORÍA DE JUEGOS y ANTECEDENTES

2.1. Juegos simples

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto finito de jugadores, que representa a los miembros de un cuerpo de toma de decisiones. Llamaremos *coalición* a cualquier subconjunto de jugadores $S \subseteq N$. Un *juego simple* se define como un par (N, W) donde $W \subseteq \mathcal{P}(N)$ es la familia de *coaliciones ganadoras*, es decir, aquellas capaces de aprobar una propuesta. Denotaremos por $SI(N)$ al conjunto de juegos simples sobre N. Denotaremos por $W^m = \{S \in W \mid T \subsetneq S \Rightarrow T \notin W\}$ al conjunto de coaliciones ganadoras minimales, aquellas que se convierten en perdedoras si se elimina alguno de sus miembros, y por W^{ls} el subconjunto de las de menor tamaño:

$$W^{ls} = \{S \in W \mid |T| < |S| \Rightarrow T \notin W\} \subseteq W^m.$$

Para subconjuntos que contienen un jugador $i \in N$ usaremos W_i, W_i^m, y W_i^{ls}.

En este marco, ciertos jugadores pueden desempeñar roles especiales. Un *jugador nulo* en (N, W) es un jugador $i \in N$ tal que $W_i^m = \emptyset$. Asimismo, dos jugadores $i, j \in N$ se consideran *simétricos* si para todo $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ se cumple que $S \cup \{i\} \in W \Leftrightarrow S \cup \{j\} \in W$.

Un caso particular de juego simple es el *juego de votación ponderado*, que puede representarse como $[q; w_1, \ldots, w_n]$, donde $q \in \mathbb{R}^n$ es la cuota de aprobación, $w_i \in \mathbb{R}$ es el peso asignado al jugador $i \in N$, y un subconjunto $S \subseteq N$ es ganador si y solo si $\sum_{i \in S} w_i \geq q$. Además, dados dos juegos simples sobre el mismo conjunto de jugadores $W, V \in SI(N)$, se puede definir el *juego disyuntivo de W y V*, cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $(W \vee V)^m = W^m \cup V^m$.

Un *índice de poder* es una función f que asocia a cada juego simple $(N, W) \in SI(N)$ un vector $f(N, W) \in \mathbb{R}^n$, donde la i-ésima coordenada $f_i(N, W)$ cuantifica el poder del jugador i en el juego según el índice f.

2.2. Índice de poder de Felsenthal

En línea con lo mencionado en la introducción, las votaciones se utilizan frecuentemente para decidir puestos de liderazgo en diversos ámbitos: formación de gobiernos parlamentarios, elección de juntas directivas empresariales, líderes vecinales, etc. En 2016, Felsenthal argumenta que, en estos escenarios, las únicas coaliciones ganadoras con posibilidad de originarse son aquellas de menor tamaño. Esta idea se apoya en el supuesto de que, una vez formada una coalición ganadora, el poder total (normalizado a 1) se distribuye de manera equitativa entre sus integrantes. Por lo tanto, cada jugador para maximizar su influencia busca formar parte de coaliciones ganadoras con el menor número de participantes. Además, para reforzar su postura, Felsenthal destaca que alcanzar un consenso generalmente resulta más sencillo cuando el tamaño del grupo es reducido. A modo de ilustración, consideremos un juego con cuatro jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y coaliciones ganadoras minimales $W^m = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 2\}\}$. Aquí, el jugador 2 nunca optaría por la coalición $\{2, 3, 4\}$ teniendo la posibilidad de ganar con $\{1, 2\}$, donde comparte el poder con un único compañero, ya que de este modo incrementa su cuota de poder. Bajo esta premisa, para un juego simple (N, W), el índice de poder de Felsenthal ψ de un jugador $i \in N$ se define en (Felsenthal, 2016) como:

$$\psi_i(N, W) = \frac{1}{|W^{ls}|} \sum_{S \in W_i^{ls}} \frac{1}{|S|}.$$

El índice se construye suponiendo que todas las coaliciones ganadoras de menor tamaño tienen la misma probabilidad $|W^{ls}|^{-1}$ de formarse y que, dentro de cada una, el poder se distribuye equitativamente, de modo que cada jugador de $S \in W^{ls}$ recibe $|S|^{-1}$. Para simplificar la notación, denotaremos con $p_W = |W^{ls}|$ la *probabilidad* de cada coalición de menor tamaño y con $c_W = |S|$ la *contribución* de un jugador en $S \in W^{ls}$.

Aunque el modelo propuesto por Felsenthal demuestra un notable rigor en el análisis de contextos de liderazgo, omite las posibles relaciones preexistentes entre jugadores que pueden influir en la formación de coaliciones, y que son determinantes en la distribución de poder. A continuación, introduciremos los juegos simples con uniones a priori, que servirán para tener en cuenta estas alianzas previas entre los jugadores.

2.3. Juegos simples con uniones a priori.

En 1977, Owen introduce un modelo novedoso en la teoría de juegos que permite incorporar afinidades que existen entre ciertos jugadores. Formalmente, un *juego simple con uniones a priori* es un triple (N, W, P), donde (N, W) es un juego simple y $P = \{P_1, \ldots, P_u\}$ es una partición de N. Existen dos uniones a priori triviales para el conjunto de jugadores N: la partición $N^0 = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, en la que cada jugador constituye su propia unión, y la partición $N^N = \{N\}$, que agrupa a todos en una única unión. Denotaremos por $SIU(N)$ al conjunto de juegos simples con uniones a priori sobre N. El marco de Owen plantea un proceso de negociación en dos etapas.

La primera etapa consiste en la *negociación entre uniones*, que se representa mediante el *juego cociente*. Para $(N, W, P) \in SIU(N)$, el juego cociente es $(U, \overline{W})$, donde los jugadores en U son las uniones de P y

$$\overline{W} = \left\{ R \subseteq U \mid \bigcup_{k \in R} P_k \in W \right\}.$$

Dada una coalición $S \subseteq N$, definimos $u(S)$ como el conjunto de representantes de S en $(U, \overline{W})$, es decir, $u(S) = \{k \in U \mid P_k \cap S \neq \emptyset\}$. Una coalición ganadora minimal $S \in W^m$ se dice *irrelevante* si su representante no es minimal en el juego cociente, es decir, $u(S) \notin \overline{W}^m$. Además, una unión es *nula* en (N, W, P) cuando cumple este rol en el juego cociente $(U, \overline{W})$.

La segunda etapa es la *negociación dentro de las uniones*, donde cada unión P_k distribuye internamente los beneficios acordados en la etapa anterior. Owen modela este nivel como un juego interno $(P_k, W_{R,k})$, donde cada coalición $S \subseteq P_k$ negocia frente a $P_k \setminus S$, exponiendo lo que puede alcanzar por sí misma y a través de la cooperación con otras uniones $\cup_{l \in U \setminus \{k\}} P_l$, sin la ayuda de $P_k \setminus S$. Es relevante subrayar que Owen excluye la posibilidad de que un subconjunto $S \subseteq P_k$ se alíe con subconjuntos *propios* de otras uniones. Para cada coalición ganadora de menor tamaño $R \in \overline{W}^{ls}$ y cada unión $k \in R$, el juego interno se define como

$$W_{R,k} = \{S \subseteq P_k \mid S \cup (\cup_{l \in R \setminus \{k\}} P_l) \in W\}.$$

El conjunto de coaliciones ganadoras minimales en $(P_k, W_{R,k})$ se denomina *coaliciones esenciales de k con respecto a R* y se denota $E^m_{R,k}(N, W, P)$. De manera análoga, el subconjunto de coaliciones ganadoras de menor tamaño se conoce como el conjunto *coaliciones esenciales de menor tamaño de k con respecto a R* y se denota por:

$$E^{ls}_{R,k}(N, W, P) := (W_{R,k})^{ls} = \Big\{ S \subseteq P_k \mid S \cup \big(\cup_{l \in R \setminus \{k\}} P_l\big) \in W, \\ T \cup \big(\cup_{l \in R \setminus \{k\}} P_l\big) \notin W \ \forall T \subset P_k, |T| < |S| \Big\}.$$

Para subconjuntos que incluyen a un jugador $i \in N$, utilizaremos $W_{R,k,i}$, $E^m_{R,k,i}(N, W, P)$ y $E^{ls}_{R,k,i}(N, W, P)$. Finalmente, definiremos el conjunto de coaliciones esenciales de menor tamaño del juego (N, W, P) como

$$E^{ls}(N, W, P) = \bigcup_{R \in \overline{W}^{ls}} \bigcup_{k \in R} E^{ls}_{R,k}(N, W, P).$$

En línea con la definición de índice de poder, un *índice de poder coalicional* es una función F que asigna a cada juego simple con uniones a priori $(N, W, P) \in SIU(N)$ un vector real n-dimensional $F(N, W, P) \in \mathbb{R}^n$.

3. ÍNDICE DE PODER DE FELSENTHAL CON UNIONES

Tal y como se ha indicado en las secciones anteriores, el índice de Felsenthal no considera la existencia de conexiones o alianzas previas entre los jugadores. Para abordar esta limitación, proponemos un nuevo índice denominado *índice de poder de Felsenthal con uniones*, que incorpora una estructura de cooperación previa usando el modelo de Owen.

3.1. Definición del nuevo índice de poder

El *índice de poder de Felsenthal con uniones* para un jugador $i \in P_k$ dentro de un juego simple con uniones a priori (N, W, P) se define como:

$$\Psi_i(N, W, P) = \frac{1}{|\overline{W}^{ls}|} \sum_{R \in \overline{W}^{ls}_k} \frac{1}{|R|} \frac{1}{|E^{ls}_{R,k}(N, W, P)|} \sum_{S \in E^{ls}_{R,k,i}(N,W,P)} \frac{1}{|S|}.$$

Este índice coincide con el de Felsenthal cuando la partición considerada es trivial, es decir, cuando P corresponde a N^0 o a N^N y, por tanto, permite generalizar al índice de Felsenthal incorporando la posibilidad de estructuras de coalición predefinidas.

Al igual que el índice original, el *Índice de Felsenthal con uniones* admite una interpretación probabilística. Puede entenderse como la contribución media esperada de cada jugador en un modelo en dos etapas: primero, la interacción entre uniones; y después, la negociación interna dentro de cada unión. En ambos niveles, las coaliciones relevantes son únicamente las ganadoras de menor tamaño, y el poder se reparte equitativamente entre los integrantes de dichas coaliciones.

De este modo, el índice resulta especialmente robusto porque refleja la ambición individual y el comportamiento estratégico de los jugadores, y a su vez incorpora las posibles agrupaciones previas a la formación de coaliciones.

Ejemplo 1. *Consideremos el juego simple con uniones a priori* (N, W, P) *con conjunto de jugadores* $N = \{a, b, c, d, e, f, g\}$*, partición* $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ *donde* $P_1 = \{a, b, c\}$*,* $P_2 = \{d, e, f\}$*,* $P_3 = \{g\}$*, y* $W^m = \{\{a, b, f\}, \{a, c, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, g\}, \{e, g\}\}$*. Entonces, el conjunto de coaliciones ganadoras de menor tamaño en el juego cociente es* $\overline{W}^{ls} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ *y los conjuntos de coaliciones esenciales de menor tamaño son:*

$$E^{ls}_{\{1,2\},1} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\} \qquad E^{ls}_{\{1,3\},1} = \{\{a\}\} \qquad E^{ls}_{\{2,3\},2} = \{\{e\}\}$$
$$E^{ls}_{\{1,2\},2} = \{\{d\}, \{f\}\} \qquad E^{ls}_{\{1,3\},3} = \{\{g\}\} \qquad E^{ls}_{\{2,3\},3} = \{\{g\}\}.$$

Calculemos el Índice de poder de Felsenthal con uniones del jugador $b \in P_1$ *en el juego* (N, W, P)*. El jugador* b *pertenece a la unión* P_1*, la cual forma parte de dos coaliciones ganadoras de menor tamaño en el juego cociente:* $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in \overline{W}^{ls}$*. Sin embargo,* b *solo es relevante en el juego interno asociado a* $\{1, 2\}$*, donde contribuye exactamente a una coalición esencial de menor tamaño,* $\{a, b\} \in E^{ls}_{\{1,2\},1}$*. El Índice de Felsenthal con uniones para* b *se calcula como:*

$$\Psi_b(N, W, P) = \frac{1}{|\overline{W}^{ls}|} \frac{1}{|\{1, 2\}|} \frac{1}{|E^{ls}_{\{1,2\},1}|} \frac{1}{|\{a, b\}|} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Este cálculo está sujeto a una interpretación probabilística. Primero, la probabilidad de que $\{a, b\} \in E^{ls}_{\{1,2\},1}$ *sea la coalición ganadora que finalmente se proclame vencedora está dada por la probabilidad de que* $\{1, 2\}$ *se forme en el juego cociente,* $p^{-1}_{\overline{W}} = \frac{1}{3}$*, junto con la probabilidad de que* $\{a, b\}$ *se forme dentro de* $(P_1, W_{\{1,2\},1})$*,* $p^{-1}_{W_{\{1,2\},1}} = \frac{1}{2}$*. Segundo, supuesta su formación,* P_1 *tiene la mitad del poder en* $\{1, 2\}$*,* $c^{-1}_{\overline{W}} = \frac{1}{2}$*, y dentro de* $\{a, b\}$ *el jugador* b *también tiene la mitad del poder,* $c^{-1}_{W_{\{1,2\},1}} = \frac{1}{2}$*. Combinando estas probabilidades y distribuciones de poder se obtiene la influencia esperada de* b*:*

$$\Psi_b(N, W, P) = \frac{1}{p_{\overline{W}} \cdot p_{W_{\{1,2\},1}}} \frac{1}{c_{\overline{W}} \cdot c_{W_{\{1,2\},1}}} = \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{24}.$$

Aplicando un razonamiento similar a todos los jugadores se obtiene la distribución completa del poder:

$$\Psi(N, W, P) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}\right).$$

3.2. Propiedades y caracterizaciones del nuevo índice de poder.

La primera caracterización identifica al nuevo índice de poder dentro del conjunto de índices que generalizan al índice de Felsenthal, i.e., dentro de los Índices de Felsenthal Coalicionales (CFI). Las propiedades consideradas en esta primera caracterización son:

No negatividad (NN). Un índice de poder coalicional F satisface NN si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y $i \in N$,

$$F_i(N, W, P) \geq 0.$$

Índice de Felsenthal coalicional (CFI). Un índice de poder coalicional F satisface CFI si para todo $(N, W) \in SI(N)$ y $i \in N$,

$$F_i(N, W, N^0) = \psi_i(N, W).$$

Juego cociente (QG). Un índice de poder coalicional F satisface QG si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y $k \in U$,

$$F_k(U, \overline{W}, U^0) = \sum_{i \in P_k} F_i(N, W, P).$$

Proporcionalidad con respecto a coaliciones esenciales de menor tamaño (PELS). Un índice de poder coalicional F satisface PELS si, para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y todo $i, j \in P_k \in P$,

$$F_i(N, W, P) \sum_{R \in \overline{W}^{ls}_k} F_j(P_k, W_{R,k}, P^0_k) = F_j(N, W, P) \sum_{R \in \overline{W}^{ls}_k} F_i(P_k, W_{R,k}, P^0_k).$$

Teorema 1. *El Índice de poder de Felsenthal con uniones es el único CFI que satisface NN, QG y PELS.*

La segunda caracterización toma como referencia el trabajo de Freixas y Samaniego (2023) sobre el índice de Felsenthal. Las propiedades que emplearemos en esta segunda caracterización son:

Eficiencia (E). Un índice de poder coalicional F satisface E si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$, $\sum_{i \in N} F_i(N, W, P) = 1$.

Jugador nulo (NP). Un índice de poder coalicional F satisface NP si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y $i \in N$ tal que es un jugador nulo en el juego (N, W), entonces $F_i(N, W, P) = 0$.

Simetría entre uniones (S-AU). Un índice de poder coalicional F satisface S-AU si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y $k, l \in U$ tales que son jugadores simétricos en el juego cociente $(U, \overline{W})$, entonces

$$\sum_{i \in P_k} F_i(N, W, P) = \sum_{i \in P_l} F_i(N, W, P).$$

Simetría dentro de uniones (S-IU). Un índice de poder coalicional F satisface S-IU si para todo $(N, W, P) \in SIU(N)$ y $i, j \in P_k \in P$, tales que son jugadores simétricos en el juego (N, W), entonces $F_i(N, W, P) = F_j(N, W, P)$.

Transferencia para coaliciones de menor tamaño entre uniones (TCLS-AU). Un índice de poder coalicional F satisface TCLS-AU si para cualquier par (N, W, P) y $(N, V, P) \in SIU(N)$ tal que $\overline{W}^{ls} \cap \overline{V}^{ls} = \emptyset$, entonces

$$F(N, W \vee V, P) = \begin{cases} F(N, W, P), & \text{si} \quad c_{\overline{W}} < c_{\overline{V}} \\ F(N, V, P), & \text{si} \quad c_{\overline{V}} < c_{\overline{W}} \\ \frac{p_{\overline{W}}}{p_{\overline{W}} + p_{\overline{V}}} F(N, W, P) + \frac{p_{\overline{V}}}{p_{\overline{W}} + p_{\overline{V}}} F(N, V, P), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Transferencia para coaliciones de menor tamaño dentro de uniones (TCLS-IU). Un índice de poder coalicional F satisface TCLS-IU si para cualquier par (N, W, P) y $(N, V, P) \in SIU(N)$ verificando que $W^{ls} \cap V^{ls} = \emptyset$ y existe $k \in U$ tal que para todo $S \in W^m \cup V^m$ se cumple que $S \subseteq P_k$, entonces

$$F(N, W \vee V, P) = \begin{cases} F(N, W, P), & \text{si} \quad c_W < c_V \\ F(N, V, P), & \text{si} \quad c_V < c_W \\ \frac{p_W}{p_W + p_V} F(N, W, P) + \frac{p_V}{p_W + p_V} F(N, V, P), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Independencia de coaliciones irrelevantes (IIC). Un índice de poder coalicional F satisface IIC si para cualquier (N, W, P), dado $\widetilde{S} \in W^m$ tal que $u(\widetilde{S}) \notin \overline{W}^m$, entonces $F(N, W, P) = F(N, W', P)$ donde $(W')^m = W^m \setminus \{\widetilde{S}\}$.

Invarianza con respecto a coaliciones esenciales de menor tamaño (ILSE). Un índice de poder coalicional F satisface ILSE si para cualquier par (N, W, P) y $(N, V, P) \in SIU(N)$, verificando que $E^{ls}(N, W, P) = E^{ls}(N, V, P)$ y que existe $R = \{k_1, \ldots, k_s\} \subseteq U$ tal que $\overline{W}^{ls} = \{R\}$ y $\overline{V}^{ls} = \{\{k_1\}, \ldots, \{k_s\}\}$, entonces $F(N, W, P) = F(N, V, P)$.

Teorema 2. *El Índice de poder de Felsenthal con uniones es el único índice de poder coalicional que satisface E, NP, S-AU, S-IU, TCLS-AU, TCLS-IU, IIC e ILSE.*

4. APLICACIÓN DEL NUEVO ÍNDICE: Reparto de poder en el Fondo Monetario Internacional.

4.2. Descripción del FMI

El Fondo Monetario Internacional (FMI) es una organización financiera global dedicada al bienestar y desarrollo económico de sus 191 países miembros. Sus objetivos principales incluyen la promoción de la cooperación monetaria internacional, el fomento del comercio global y la provisión de asistencia financiera temporal a países que atraviesan dificultades económicas.

El órgano de mayor jerarquía en la toma de decisiones es la *Junta de gobernadores*, compuesta por 191 gobernadores, cada uno representando a un país miembro. A cada gobernador se le asigna un peso de voto en función de la contribución financiera de su país al FMI, y las decisiones requieren un porcentaje específico de votos, según la relevancia de la decisión (50%, 70% o 85%). La Junta de gobernadores se suele reunir una única vez al año, y la actividad cotidiana es llevada a cabo por un órgano más pequeño conocido como *Junta Ejecutiva*. La composición de esta junta surge como resultado de negociaciones entre los 191 países miembros, que primero se ponen de acuerdo para formar grupos, y una vez constituidos, cada grupo elige un representante que emite sus votos en la Junta Ejecutiva. Los grupos se llaman las *circunscripciones* y los representantes son los *directores ejecutivos*. El cuerpo consta de 25 directores ejecutivos y, como en la Junta de gobernadores, las decisiones requieren diferentes cuotas (50%, 70% o 85%). Es pertinente indicar que tres países (Afganistán, Myanmar y Venezuela) no participan actualmente en el FMI debido a problemas de reconocimiento gubernamental, por lo que no se incluyen en este estudio.

A continuación, examinamos la distribución del poder entre los países miembros del FMI en cada una de sus Juntas de decisión. Este estudio permite comparar la influencia que cada país ejerce en cada una de ellas, evaluando si un país gana o pierde poder al entrar a formar parte de una circunscripción.

4.2. Modelo en el marco de la teoría de juegos.

Teniendo cuenta las estructuras de gobierno descritas, la toma de decisiones en ambos órganos puede modelarse como un juego simple. Denotaremos por (N, W) el juego simple correspondiente a la Junta de gobernadores con 188 jugadores y por $(U, \overline{W})$ el correspondiente a la Junta Ejecutiva con 25 jugadores. Cabe señalar que, considerando la partición P de los países en circunscripciones, el juego de la Junta Ejecutiva $(U, \overline{W})$ es el juego cociente de (N, W, P).

En lo que respecta a la evaluación del poder, pueden emplearse índices de poder clásicos, como el índice de Felsenthal ψ, para cuantificar la influencia de cada país $i \in N$ en la Junta de gobernadores (N, W) o la influencia conjunta de cada circunscripción $k \in U$ en la Junta Ejecutiva $(U, \overline{W})$ [1]. No obstante, dichos índices no permiten medir el poder de cada país en la Junta ejecutiva (N, W, P), es decir, no permiten desglosar el poder individual de cada país dentro de una circunscripción $i \in P_k$. Esta limitación puede abordarse mediante el nuevo índice propuesto en este trabajo, que hace posible integrar las circunscripciones mediante las uniones a priori. De este modo, el *Índice de Felsenthal con uniones* Ψ se convierte en el candidato idóneo para medir el poder de cada país en la Junta Ejecutiva (N, W, P). [2] La Figura 2 muestra la estructura del FMI y los índices de poder apropiados para cada órgano de gobierno.

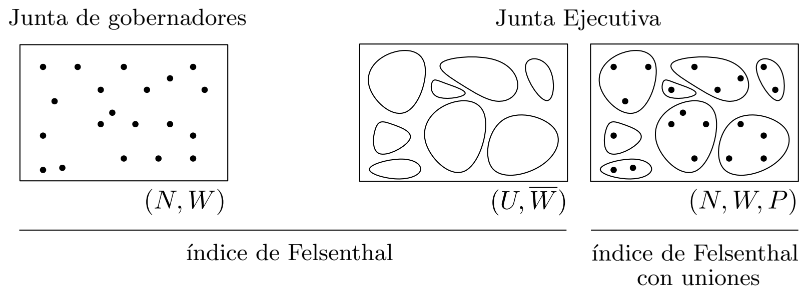


Figura 2. Estructura del FMI e índices apropiados.

4.3. Análisis de poder para una cuota 50%.

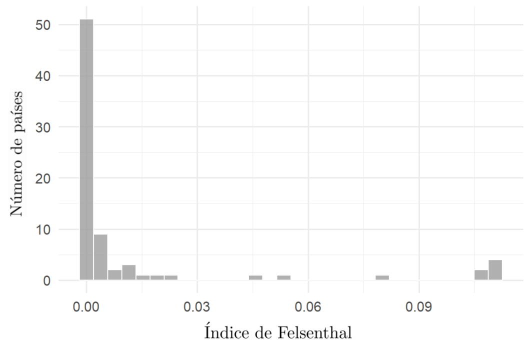
En base a lo expuesto anteriormente, hemos calculado el *Índice de Felsenthal* ψ y el *Índice de Felsenthal con uniones* Ψ, para cuantificar el poder de cada país en la Junta de gobernadores (N, W) y en la Junta Ejecutiva (N, W, P), respectivamente. Los cálculos se realizaron considerando la configuración institucional de marzo de 2025, y para decisiones tomadas bajo una cuota del 50%. A continuación, se ofrece un análisis general de los resultados, prestando especial atención al impacto que tiene sobre el poder de los países la delegación de su voto en una circunscripción.

Junta de gobernadores. Cabe señalar que el tamaño mínimo de una coalición ganadora en este órgano es de 9 ($c_W = 9$), lo que implica que al menos nueve países deben ponerse de acuerdo para aprobar una decisión al 50% . En cuanto a los valores del índice de Felsenthal, solo 77 de los 188 países presentan un índice distinto de cero. En la Figura 3 se representa el histograma de esos 77 valores, y en él se evidencia un notable desequilibrio en la distribución del poder incluso entre los miembros con valores no nulos. La mayoría de los países registran valores cercanos a cero, mientras que unos pocos concentran la mayor parte

[1] Veáse Saavedra-Nieves et al. (2021) y Armijos-Toro et al. (2024).

[2] Veáse Alonso-Meijide et al. (2005) para otro estudio del FMI con índices coalicionales.

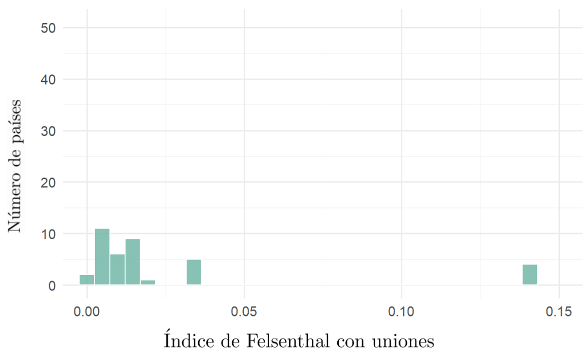
del poder. De hecho, los seis países más poderosos acumulan el 66% del poder total, con valores similares entre ellos (alrededor de 0.1), como se observa en la tabla de la Figura 3.



Orden por peso	País	Circunscripción	Índice de Felsenthal
1°	Estados Unidos	*1*	0.111
2°	Japón	*2*	0.111
3°	China	*3*	0.111
4°	Alemania	*5*	0.111
5°	Francia	*9*	0.108
6°	Reino Unido	*10*	0.108
7°	Italia	*8*	0.080
8°	Sri Lanka	*16*	0.053
9°	Siria	*18*	0.046
10°	Canadá	*12*	0.022

Figura 3. A la izquierda, el histograma de los valores no nulos del índice de Felsenthal; a la derecha, la lista de los diez países con el índice de Felsenthal más alto, en orden descendente.

Junta Ejecutiva. En este órgano, solo se requieren siete circunscripciones para formar una coalición ganadora ($c_{\overline{W}} = 7$). Los resultados indican una concentración del poder aún mayor que en la Junta de gobernadores. Solo 38 países presentan un índice distinto de cero, y, de nuevo solo unos pocos dominan la toma de decisiones, como se evidencia en el histograma de la Figura 4. Los seis países más poderosos son los mismos que en la Junta de gobernadores, y, en conjunto, poseen el 64,3% del poder tal como muestra la tabla de la Figura 4. Pese a estas similitudes, la formación de circunscripciones provoca que, en este caso, el poder de los cuatro países líderes sea casi cuatro veces superior al de Francia y Reino Unido.



Posición de voto	País	Circunscripción	Índice de Felsenthal con uniones
1°	Estados Unidos	*1*	0.143
2°	Japón	*2*	0.143
3°	China	*3*	0.143
4°	Alemania	*5*	0.143
5°	Francia	*9*	0.036
6°	Reino Unido	*10*	0.036
12°	España	*6*	0.032
13°	México	*6*	0.032
38°	Colombia	*6*	0.032
83°	Guatemala	*6*	0.021

Figura 4. A la izquierda, el histograma de los valores no nulos del *Índice de Felsenthal con uniones*; a la derecha, la lista de los diez países con el *Índice de Felsenthal con uniones* más alto, en orden descendente.

Además de analizar la distribución de poder dentro de cada Junta, resulta pertinente explorar la relación entre el peso de voto de cada país y su poder real, dadas las frecuentes discrepancias entre ambos. Se realiza una comparación utilizando los dos diagramas de dispersión presentados en la Figura 5.

Junta de gobernadores. El diagrama de dispersión de la izquierda muestra la relación entre la proporción del peso total y el índice de Felsenthal. El gráfico sugiere la existencia de una correlación positiva entre peso y poder, que también se puede apreciar en tabla de la Figura 3, donde el orden según el índice de Felsenthal coincide con el orden por peso mostrado en la primera columna. Sin embargo, el gráfico también revela que esta relación es no proporcional, ya que los puntos de datos se desvían considerablemente de la línea de identidad (discontinua). Por ejemplo, la mayoría de países con proporción de peso superior a 0.025, como Francia, el Reino Unido e Italia, poseen más poder de lo que sugiere su peso. La excepción es Estados Unidos, cuyo poder se alinea con otros tres países de gran peso (Japón, China y Alemania), pese a contribuir significativamente más.

Junta Ejecutiva. El diagrama de dispersión de la derecha corresponde al *Índice de Felsenthal con uniones.* Revela que la formación de circunscripciones altera significativamente la proporcionalidad entre el poder y el peso. Por ejemplo, países con un peso pequeño como España, México, Colombia y Guatemala, logran una posición estratégica dentro de la Junta Ejecutiva, apareciendo entre los 10 países lideres a pesar de sus posiciones de peso más bajas 12^{th}, 13^{th}, 38^{th} y 83^{th}, respectivamente (consultar tabla de la Figura 4). Por el contrario, Francia, Reino Unido e Italia pierden influencia debido a la formación de circunscripciones. Finalmente, los cuatro países con mayor peso se vuelven aún más dominantes en la Junta Ejecutiva, como se subrayó previamente en el análisis del histograma.

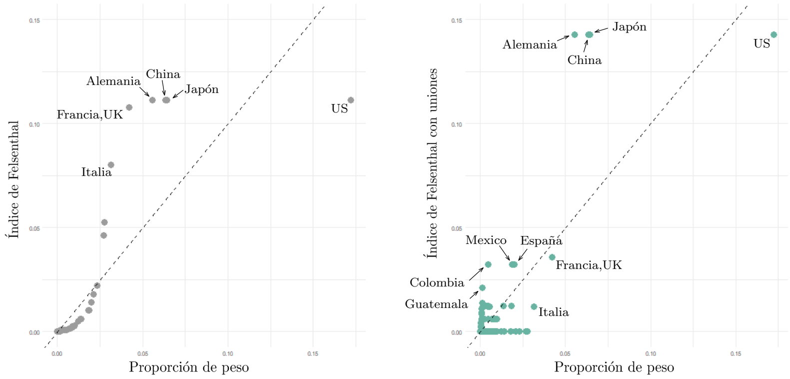


Figura 5. Diagramas de dispersión que muestran la proporción de peso sobre el total para diferentes países en el eje X, y los valores correspondientes de los índices de Felsenthal y Felsenthal con uniones en el eje Y (izquierda y derecha, respectivamente).

En resumen, aplicando el nuevo índice, *Índice de Felsenthal con uniones*, hemos averiguado que el poder está distribuido de manera desigual en ambos órganos, concentrándose en los seis países con mayor peso. El desequilibrio es aún más pronunciado en la Junta Ejecutiva, ya que aumenta el número de jugadores nulos y el poder está todavía más concentrado en los primeros cuatro países. Los países restantes también se ven afectados por la formación de circunscripciones, ya que estas mejoran la posición de algunos países con menor peso mientras reducen el poder de otros con mayor peso.

4.4. Estudio de poder para distintas cuotas.

El análisis anterior se centró en la cuota adoptada para decisiones ordinarias ($q = 50\%$). No obstante, umbrales más altos, como los requeridos para decisiones de mayor trascendencia ($q = 70\%, q = 85\%$), pueden generar cambios sustanciales en la distribución del poder, por lo que examinaremos cómo incrementos en la cuota afectan la asignación del poder. Este tipo de análisis puede proporcionar información valiosa para determinar la cuota apropiada para una decisión específica, asegurando que el poder se distribuya entre los miembros conforme a lo previsto.[3]

La Figura 6 ilustra el impacto de la variación de la cuota sobre el poder en la Junta Ejecutiva para los seis países líderes: Estados Unidos, Japón, China, Alemania, Francia y Reino Unido. Los valores representados corresponden al cálculo del *Índice de Felsenthal con uniones* para cuotas que van desde 0.5 hasta 1, con incrementos de 0.05. Cada país dominante está representado por una línea distinta; cabe destacar que China y Japón, así como Francia y Reino Unido, presentan valores idénticos en las cuotas analizadas, por lo que cada par se representa mediante la misma línea.

En términos generales, el gráfico sugiere que un aumento en la cuota tiende a equilibrar el poder. A medida que el requisito de mayoría se incrementa, los países dominantes experimentan un descenso en su influencia, acercándose al límite $q = 100\%$, correspondiente a una regla de votación por unanimidad en la que todos los países participantes poseen el mismo poder. Las excepciones son Francia y Reino Unido, cuyo poder aumenta hasta aproximadamente el 70%. Sin embargo, más allá del 80%, las posiciones estratégicas de todos los países convergen, siguiendo una tendencia descendente.

[3]Un análisis similar empleando el índice de Banzhaf se lleva a cabo en Leech (2002).

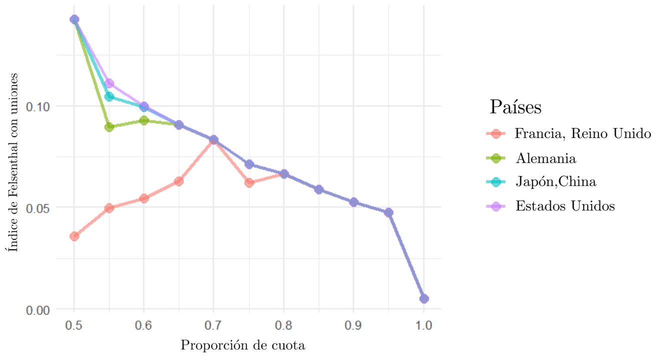


Figura 6. El efecto del requisito de mayoría sobre el valor del *Índice de Felsenthal con uniones* de los seis países con mayor peso.

5. CONCLUSIONES

La medición de la influencia de los participantes en un contexto de toma de decisiones, a menudo se basa en los pesos de voto, una práctica que frecuentemente conduce a conclusiones erróneas. En este trabajo se ha introducido, en el marco de la teoría de juegos cooperativa, una medida más precisa de la influencia real de cada jugador denominada *Índice de poder de Felsenthal con uniones.* Se han identificado dos caracterizaciones axiomáticas distintas del nuevo índice. Estas no solo permiten profundizar en la comprensión del índice, sino que a su vez facilitan la comparación con otros índices de poder existentes, puesto que muchos comparten propiedades con el nuestro.

Además, se ha aplicado el *Índice de Felsenthal con uniones* para examinar la asignación del poder entre los países en el Fondo Monetario Internacional, una institución cuya estructura se ajusta perfectamente a nuestro marco analítico. Del análisis se han extraído tres hallazgos relevantes. Primero, la distribución del poder cambia según de cómo los países participen en los procesos de toma de decisiones, ya sea como entidades individuales o como parte de una circunscripción formada por de la agrupación de países. Segundo, identificamos discrepancias significativas entre el peso de voto de un miembro y su influencia real. Tercero, la distribución del poder resulta muy sensible al umbral de mayoría fijado para la votación. Esta información (o una similar derivada de nuevos datos) puede ser de gran utilidad para futuras reformas del FMI, dado que suele revisar periódicamente su estructura de gobierno y los pesos asignados a cada país, con el propósito de mantener una institución eficaz y representativa de sus miembros.

Una versión extendida de este trabajo, en la que se incluyen demostraciones y una mayor descripción de las propiedades, se encuentra actualmente en revisión en la revista Annals of Operations Research.

AGRADECIMIENTOS

Esta publicación forma parte de los proyectos de I+D+i con referencia PID2021-12403030NB-C31 y PID2021-124030NB-C32, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por el FEDER/UE. Asimismo, ha contado con el apoyo de la Xunta de Galicia (Grupos de Referencia Competitiva ED431C-2024/14) y del CITIC, como centro acreditado de excelencia dentro del Sistema Universitario de Galicia y miembro de la Red CIGUS, que recibe subvenciones de la Consellería de Educación, Ciencia, Universidades y Formación Profesional de la Xunta de Galicia. Además, está cofinanciado por la UE a través del programa operativo FEDER Galicia 2021-27 (Ref. ED431G 2023/01). La primera autora recibió financiación en el marco del Programa Estatal de Formación de Doctores (RD 103/2019), mediante la ayuda PRE2022-104510, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y el FSE+.

REFERENCIAS

Alonso-Meijide, J. M. y Bowles, C. (2005) Generating functions for coalitional power indices: An application to the IMF. Annals of Operations Research, 137, 21–44.

Alonso-Meijide, J. M., Casas-Méndez, B., Fiestras-Janeiro, M.G. et al. (2011) The Deegan–Packel index for simple games with a priori unions. Quality and Quantity, 45, 425–439.

Armijos-Toro, L. M., Alonso-Meijide, J. M., Mosquera, M. A., y Saavedra-Nieves, A. (2024) A sampling approach for the approximation of the Deegan-Packel index. Expert Systems with Applications, 256, 124876.

Aumann, R. J. (2017) Power indexes. In The New Palgrave Dictionary of Economics, 1–40. Palgrave Macmillan UK.

Banzhaf, J. F. (1965) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review, 19(2), 317–343.

Deegan, J. y Packel, E. (1978) A new index of power for simple n-person games. International Journal of Game Theory, 7, 113–123.

Felsenthal, D. (2016) A well-behaved index of a priori p-power for simple n-person games. Homo Oeconomicus, 33.

Freepik. (s.f.) Successful business professionals voting with show of hands while working together in the modern office. `https://www.freepik.com/premium-photo/successful-business-professionals-voting-with-show-hands-while-working-together-modern-office_15563099.htm`[Imagen].

Freixas, J. y Samaniego, D. (2023) On the Felsenthal power index. Group Decision and Negotiation, 32(6), 1273–1288.

Leech, D. (2002) Voting power in the governance of the IMF. Annals of Operations Research, 109, 373–395.

Owen, G. (1977) Values of games with a priori unions. In R. Henn y O. Moeschlin (Eds.), Mathematical Economics and Game Theory, 76–88. Springer Berlin Heidelberg.

Owen, G. (1982) Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions. In Power, Voting, and Voting Power, 232–238. Physica-Verlag HD.

Pietro Naj-Oleari. (2010). MEPs vote by show of hands: Food quality: legislation needed. `https://www.flickr.com/photos/european_parliament/4462502498` [Imagen].

Saavedra-Nieves, A. y Fiestras-Janeiro, M. (2021) Sampling methods to estimate the Banzhaf-Owen value. Annals of Operations Research, 301, 199–223. Springer.

Shapley, L. y Shubik, M. (1954) A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American Political Science Review, 48(3), 787–792.